Εισαγωγικές έννοιες

Δ. Γ. Παπαγεωργίου
Τμήμα Μηχανικών Επιστήμης Υλικών
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

dpapageo@uoi.gr
http://pc164.materials.uoi.gr/dpapageo

Κατηγορίες προβλημάτων (σε μια διάσταση)

Το πρόβλημα
Να βρεθεί το ελάχιστο της συνάρτησης $f(x)$. Γράφουμε: $\min_x f(x)$

- Ελαχιστοποίηση χωρίς περιορισμούς
  $x \in R \qquad f(x): R \to R$

- Ελαχιστοποίηση με περιορισμούς
  Επιπλέον, πρέπει να ικανοποιούνται οι περιορισμοί:
  $c_i(x) = 0, \quad i = 1 \cdots K$ ισοτικοί περιορισμοί
  $c_i(x) \geq 0, \quad i = K+1 \cdots M$ ανισοτικοί περιορισμοί
  Πχ. $\min_x f(x), \quad c_1(x) = x^2 - 1 \geq 0$

- Ελαχιστοποίηση με όρια στις μεταβλητές
  $x \in [a, b] \qquad f(x): R \to R$
  Πχ. $\min_x f(x), \quad x \in [0,1]$

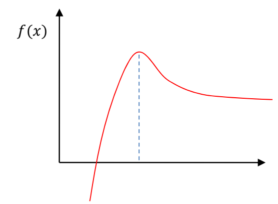
Προβλήματα εύρεσης μεγίστου

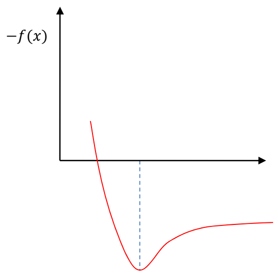
Προβλήματα εύρεσης μεγίστου:

$$\max_x f(x)$$

μπορούν να αναχθούν σε προβλήματα ελαχιστοποίησης

$$\max_x f(x) = \min_x[-f(x)]$$





Συμβολισμοί

N, n Πλήθος μεταβλητών (παραμέτρων) της συνάρτησης. Ονομάζεται και διάσταση του προβλήματος.

$\boldsymbol{x}, \vec{x}$ Διάνυσμα του N-διάστατου χώρου με στοιχεία $x_1, x_2, \cdots x_N$
Αναπαριστάται και ως πίνακας στήλη:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

$f(\boldsymbol{x})$ Η συνάρτηση της οποίας αναζητούμε ελάχιστο. Ονομάζεται και αντικειμενική συνάρτηση.

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_N} \end{bmatrix}$$ Το διάνυσμα πρώτων παραγώγων της συνάρτησης.

Συμβολίζεται και με $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$

Συμβολισμοί

Ο πίνακας των δευτέρων παραγώγων της συνάρτησης.

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_N} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_1} & & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N^2} \end{bmatrix}$$

Λέγεται και Εσσιανός πίνακας (Hessian). Τα στοιχεία του είναι: $G_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$

Αν η f είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, τότε τα στοιχεία του είναι συμμετρικά:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Συμβολισμοί

$\boldsymbol{x}^*$ Το σημείο στο οποίο η αντικειμενική συνάρτηση έχει ελάχιστο. Ονομάζεται και ελαχιστοποιητής της $f(x)$.

$f^* = f(\boldsymbol{x}^*)$ Η τιμή της συνάρτησης στο ελάχιστο.

$\boldsymbol{G}^* = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^*)$ Ο πίνακας των δευτέρων παραγώγων στο ελάχιστο.

Μικρά έντονα γράμματα συμβολίζουν διανύσματα N θέσεων.

Κεφαλαία έντονα γράμματα συμβολίζουν πίνακες $N \times N$

Ο εκθέτης Τ δηλώνει τον ανάστροφο πίνακα (οι γραμμές γίνονται στήλες):

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_N]$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Ο εκθέτης -1 δηλώνει τον αντίστροφο:

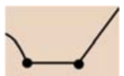
$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I} \qquad \boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Τι είναι ελάχιστο

Για μονοδιάστατη συνάρτηση

Τοπικό ελάχιστο:

Σημείο x^* με την ιδιότητα $f(x^*) \le f(x), \quad \forall x \in R$ τέτοιο ώστε $|x - x^*| < \varepsilon$ για οσοδήποτε μικρό ε



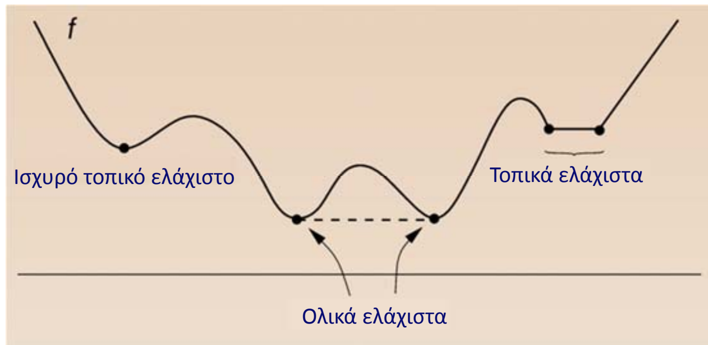
Ισχυρό τοπικό ελάχιστο:

Σημείο x^* με την ιδιότητα $f(x^*) < f(x), \quad \forall x \in R$ τέτοιο ώστε $|x - x^*| < \varepsilon$ για οσοδήποτε μικρό ε

Ολικό ελάχιστο:

Σημείο x^* με την ιδιότητα $f(x^*) < f(x), \quad \forall x \in R$

Τι είναι ελάχιστο



Αναγκαίες και ικανές συνθήκες

Για μονοδιάστατη συνάρτηση (υπενθύμιση)

Αναγκαίες συνθήκες:

Πρώτης τάξης: $f'(x^*) = 0$

Δεύτερης τάξης: $f''(x^*) \geq 0$

Ικανές συνθήκες:

Πρώτης τάξης: $f'(x^*) = 0$

Δεύτερης τάξης: $f''(x^*) > 0$

Αναγκαίες και ικανές συνθήκες

Για πολυδιάστατη συνάρτηση

Αναγκαίες συνθήκες:

Πρώτης τάξης: $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \mathbf{0}$

Δεύτερης τάξης: $\boldsymbol{s}^T \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{s} \geq 0 \qquad \forall \boldsymbol{s}$

Ικανές συνθήκες:

Πρώτης τάξης: $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \mathbf{0}$

Δεύτερης τάξης: $\boldsymbol{s}^T \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{s} > 0 \qquad \forall \boldsymbol{s} \neq 0$

Η συνθήκη δεύτερης τάξης στην ανωτέρω μορφή δεν μπορεί να ελεγθεί υπολογιστικά. Διατυπώνεται με ισοδύναμο τρόπο ώστε ο έλεγχός της να είναι υπολογιστικά εφικτός:

Ικανή συνθήκη δεύτερης τάξης:

Όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^*)$ είναι θετικές.

Υπενθύμιση: Πράξεις μεταξύ πινάκων και διανυσμάτων

Αν έχουμε: $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Μηδενικό διάνυσμα

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιασμός διανύσματος με αριθμό

$$\lambda \boldsymbol{a} = \lambda \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\alpha_1 \\ \lambda\alpha_2 \\ \lambda\alpha_3 \end{bmatrix} = \text{διάνυσμα στήλη}$$

Πολλαπλασιασμός πίνακα με αριθμό

$$\lambda \boldsymbol{A} = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{bmatrix} = \text{πίνακας}$$

Υπενθύμιση: Πράξεις μεταξύ πινάκων και διανυσμάτων

Ανάστροφοι

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιασμός διανυσμάτων

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \text{αριθμός}$$

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} = \text{πίνακας}$$

Υπενθύμιση: Πράξεις μεταξύ πινάκων και διανυσμάτων

Μέτρο διανύσματος

$$\|\boldsymbol{a}\|^2 = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \text{αριθμός}$$

Πολλαπλασιασμός πίνακα με διάνυσμα

$$\boldsymbol{Ab} = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + a_{13}b_3\\ a_{21}b_2 + a_{22}b_2 + a_{23}b_3\\ a_{31}b_1 + a_{32}b_2 + a_{33}b_3\end{bmatrix} = \text{διάνυσμα στήλη}$$

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}b_1 & b_2 & b_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}b_1a_{11} + b_2a_{21} + b_3a_{31} & b_1a_{12} + b_2a_{22} + b_3a_{32} & b_1a_{13} + b_2a_{23} + b_3a_{33}\end{bmatrix}$$

$= \text{διάνυσμα γραμμή}$

Υπενθύμιση: Πράξεις μεταξύ πινάκων και διανυσμάτων

Μοναδιαίος πίνακας

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιασμός διανύσματος με το μοναδιαίο πίνακα

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{bmatrix} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{T}}$$

$$\boldsymbol{Ia} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix} = \boldsymbol{a}$$

Πολλαπλασιασμός πίνακα με το μοναδιαίο πίνακα

$$\boldsymbol{AI} = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} = \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{IA} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} = \boldsymbol{A}$$

Υπενθύμιση: Πράξεις μεταξύ πινάκων και διανυσμάτων

Ανάστροφοι αθροισμάτων

$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^T = \boldsymbol{a}^T + \boldsymbol{b}^T$

$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}^T$

Ανάστροφοι γινομένων

$(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b})^T = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{a}$

$(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$

$(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{Ab})^T = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{a}$

Πρώτες παράγωγοι

$\nabla(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}) = \nabla(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}$

Για συμμετρικό πίνακα A

$\nabla(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax}) = 2\boldsymbol{Ax}$

$\nabla^2(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax}) = 2\boldsymbol{A}$

Ιδιοτιμές πίνακα

Θεωρήστε ένα πίνακα A με N γραμμές και N στήλες.

Πρόβλημα ιδιοτιμών

Να βρεθεί αριθμός λ και διάνυσμα $\boldsymbol{w}$ που να ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\boldsymbol{Aw} = \lambda\boldsymbol{w}$$

Ο αριθμός λ λέγεται ιδιοτιμή του πίνακα.

Το διάνυσμα $\boldsymbol{w}$ λέγεται ιδιοδιάνυσμα του πίνακα.

Ένας πίνακας $N \times N$ έχει N ιδιοτιμές και N ιδιοδιανύσματα

Ο πίνακας A λέγεται:

- Θετικά ορισμένος όταν όλες οι ιδιοτιμές λ_i είναι θετικές.
- Αρνητικά ορισμένος όταν όλες οι ιδιοτιμές λ_i είναι αρνητικές.

Παράδειγμα #1

Βρείτε τις ιδιοτιμές του πίνακα:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Γράφουμε το πρόβλημα ιδιοτιμών:

$$\boldsymbol{Aw} = \lambda \boldsymbol{w} \quad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{Aw} - \lambda \boldsymbol{Iw} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{w} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\boldsymbol{w} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & -3 \\ -3 & 2-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (2-\lambda)x - 3y = 0 \\ -3x + (2-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

Ομογενές γραμμικό σύστημα
2 εξισώσεων με 2 αγνώστους

Παράδειγμα #1

Για να έχει λύση το ομογενές σύστημα πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών να είναι ίση με μηδέν

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(2-\lambda)^2 - (-3)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$(2-\lambda-3)(2-\lambda+3) = 0 \Rightarrow$$

$$(-1-\lambda)(5-\lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -1-\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \\ 5-\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 5 \end{cases}$$

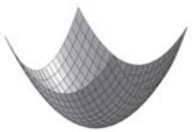
Στάσιμα σημεία

Τα σημεία της συνάρτησης που ικανοποιούν τη συνθήκη πρώτης τάξης

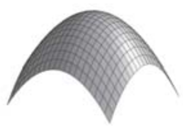
$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = 0$$

ονομάζονται στάσιμα σημεία.

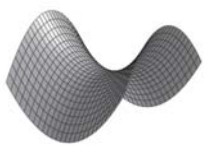
Τύποι στάσιμων σημείων



Ελάχιστο:
Όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα $\boldsymbol{G}$ είναι θετικές



Μέγιστο:
Όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα $\boldsymbol{G}$ είναι αρνητικές



Σαγματικό σημείο:
Κάποιες ιδιοτιμές του πίνακα $\boldsymbol{G}$ είναι θετικές και κάποιες αρνητικές.

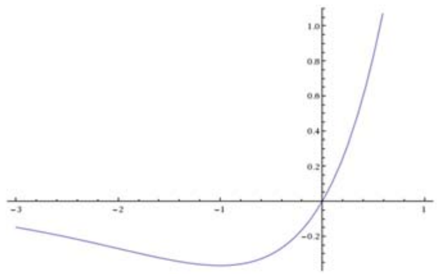
Παράδειγμα #2 Εύρεση ελαχίστου (αναλυτικά)

Μονοδιάστατη συνάρτηση (υπενθύμιση)

Θεωρήστε τη συνάρτηση

$$f(x) = xe^x \qquad x \in R$$

Να βρεθεί το ελάχιστο x^* και η τιμή της συνάρτησης στο ελάχιστο $f^* = f(x^*)$



Παράδειγμα #2 Εύρεση ελαχίστου (αναλυτικά)

$f(x) = xe^x$

Η πρώτη παράγωγος είναι:

$f'(x) = e^x + xe^x$

Βρίσκουμε το σημείο που μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος:

$f'(x) = 0 \;\Rightarrow$

$\boxed{e^x + xe^x = 0} \Rightarrow$

$e^x(1 + x) = 0 \;\Rightarrow$

$1 + x = 0 \;\Rightarrow$

$x = -1$

Παρατήρηση: πρέπει να λύσουμε μια μη γραμμική εξίσωση.

Η δεύτερη παράγωγος είναι:

$f''(x) = e^x + e^x + xe^x = e^x(x + 2)$

Η δεύτερη παράγωγος στο ελάχιστο είναι:

$f''(-1) =$

$e^{-1}(-1 + 2) =$

$\frac{1}{e} > 0$

Συνεπώς στο σημείο $x = -1$ έχουμε ελάχιστο.

Η τιμή της συνάρτησης στο ελάχιστο είναι:

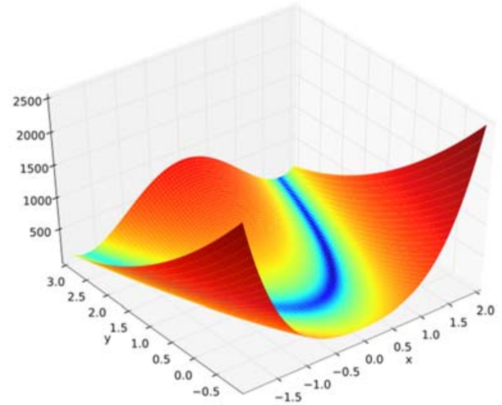
$f^* = f(-1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e} \approx -0.37$

Παράδειγμα #3 Εύρεση ελαχίστου (αναλυτικά)

Διδιάστατη συνάρτηση

Βρείτε το ελάχιστο της συνάρτησης Rosenbrock:

$$f(x, y) = 100(y - x^2)^2 + (1 - x)^2$$



Παράδειγμα #3 Εύρεση ελαχίστου (αναλυτικά)

$f(x, y) = 100(y - x^2)^2 + (1 - x)^2$

Οι πρώτες παράγωγοι είναι:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -400x(y - x^2) - 2(1 - x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 200(y - x^2)$$

Πρέπει να βρούμε το σημείο x, y που μηδενίζονται οι πρώτες παράγωγοι:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$-400x(y - x^2) - 2(1 - x) = 0 \quad (1)$$

$$200(y - x^2) = 0 \quad (2)$$

Πρέπει να λύσουμε ένα μη γραμμικό σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους.

(2) $\Rightarrow (y - x^2) = 0$

Αντικαθιστώ στην (1)

$2(1 - x) = 0 \;\Rightarrow$

$\boxed{x = 1}$

Αντικαθιστώ το $x = 1$ στην (2)

$200(y - 1^2) = 0 \;\Rightarrow$

$\boxed{y = 1}$

Για $x = 1, y = 1$ έχουμε στάσιμο σημείο.

Παράδειγμα #3 Εύρεση ελαχίστου (αναλυτικά)

Υπολογίζουμε τον πίνακα των δευτέρων παραγώγων:

$$\boldsymbol{G}(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

Βρήκαμε τις πρώτες παραγώγους:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -400x(y - x^2) - 2(1 - x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 200(y - x^2)$$

Τα στοιχεία του πίνακα $\boldsymbol{G}$ είναι:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -400(y - 3x^2) + 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 200$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -400x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -400x$$

Στο σημείο $x = 1, y = 1$ ο πίνακας είναι:

$$\boldsymbol{G}(1,1) = \begin{bmatrix} 802 & -400 \\ -400 & 200 \end{bmatrix}$$

Πρέπει να εξετάσουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα $\boldsymbol{G}$ για να διαπιστώσουμε αν έχουμε ελάχιστο.

Παράδειγμα #3 Εύρεση ελαχίστου (αναλυτικά)

Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα των δευτέρων παραγώγων:

$$\boldsymbol{Gw} = \lambda \boldsymbol{w} \;\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{Gw} - \lambda \boldsymbol{Iw} = 0 \;\Rightarrow$$

$$(\boldsymbol{G} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{w} = 0 \;\Rightarrow$$

$$\left(\begin{bmatrix} 802 & -400 \\ -400 & 200 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\boldsymbol{w} = 0 \;\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 802 - \lambda & -400 \\ -400 & 200 - \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \;\Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} (802 - \lambda)x - 400y = 0 \\ -400x + (200 - \lambda)y = 0 \end{cases}}$$

Ομογενές γραμμικό σύστημα
2 εξισώσεων με 2 αγνώστους

Για να έχει λύση εκτός από την τετριμμένη ($x = y = 0$)πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών να είναι ίση με μηδέν

$$\begin{vmatrix} 802 - \lambda & -400 \\ -400 & 200 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow$$

$$(802 - \lambda)(200 - \lambda) - 160000 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 - 1002\lambda + 400 = 0 \;\Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda_1 \approx 0.3994 \\ \lambda_2 \approx 1001.6 \end{cases}$$

Οι ιδιοτιμές είναι θετικές (θετικά ορισμένος πίνακας), οπότε το σημείο $x = 1, y = 1$ είναι ελάχιστο.