

Μέθοδοι μονοδιάστατης ελαχιστοποίησης

Δ. Γ. Παπαγεωργίου
Τμήμα Μηχανικών Επιστήμης Υλικών
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

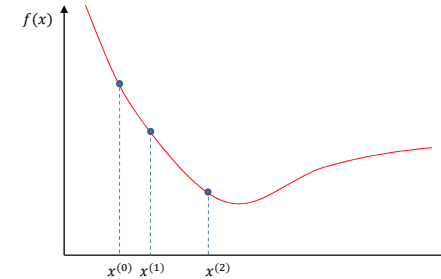
dparageo@cc.uoi.gr
<http://pc164.materials.uoi.gr/dparageo>

Βασικές αρχές μεθόδων ελαχιστοποίησης

- Οι μέθοδοι ελαχιστοποίησης είναι επαναληπτικές.
- Ξεκινώντας από μια αρχική προσέγγιση του ελαχίστου (την συμβολίζουμε $x^{(0)}$) παράγουν διαδοχικές προσεγγίσεις $x^{(1)}, x^{(2)} \dots x^{(k)}$ που συγκλίνουν στο ελάχιστο.

Υπάρχουν δύο βασικές κατηγορίες μεθόδων:

- Μέθοδοι που δεν χρησιμοποιούν τις παραγώγους, αλλά μόνο τις τιμές της συνάρτησης.
- Μέθοδοι που χρησιμοποιούν τις παραγώγους (πρώτες ή/και δεύτερες) της συνάρτησης.

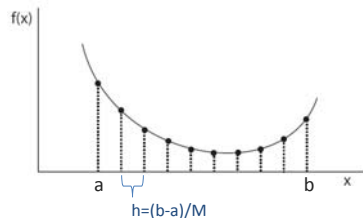


Υπολογιστικές Μέθοδοι Πολύπλοκων Συστημάτων

Μονοδιάστατη ελαχιστοποίηση 2

Αναζήτηση με διαμέριση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)$ και ένα διάστημα $[a, b]$ μέσα στο οποίο γνωρίζουμε ότι βρίσκεται το ελάχιστο.



Αναζήτηση με διαμέριση:

- Χωρίζουμε το διάστημα $[a, b]$ σε M ίσα υποδιαστήματα το καθένα με μήκος

$$h = \frac{b - a}{M}$$

- Ονομάζουμε τα σημεία $x_0, x_1, x_2, \dots, x_M$
- Το κάθε σημείο x_i δίνεται από: $x_i = a + ih$
- Υπολογίζουμε την τιμή της συνάρτησης σε κάθε σημείο: $f_i = f(x_i)$
- Επιλέγουμε ως ελάχιστο x^* το σημείο x_i που έχει την μικρότερη τιμή f_i

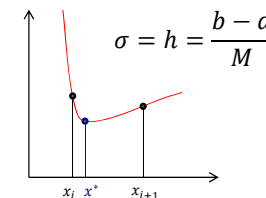
Υπολογιστικές Μέθοδοι Πολύπλοκων Συστημάτων

Μονοδιάστατη ελαχιστοποίηση 3

Αναζήτηση με διαμέριση

Σφάλμα στην εύρεση του ελαχίστου

- Η αναζήτηση με διαμέριση βρίσκει μια προσεγγιστική λύση.
- Τι πρέπει να κάνουμε για να βρούμε μια ακριβέστερη προσέγγιση του ελαχίστου;
→ Πυκνότερη διαμέριση.
- Ποιο είναι το σφάλμα που κάνουμε χρησιμοποιώντας αυτή τη μέθοδο;



Υπολογιστικές Μέθοδοι Πολύπλοκων Συστημάτων

Μονοδιάστατη ελαχιστοποίηση 4

- Πόσες διαμερίσεις χρειάζονται για να βρούμε το ελάχιστο με προκαθορισμένο σφάλμα ;

$$M = \frac{b - a}{\sigma}$$

- Παράδειγμα:

Αν $a = 0, b = 1, \sigma = 10^{-6}$

$$M = \frac{b - a}{\sigma} = \frac{1}{10^{-6}} = 10^6$$

- Ποιο είναι το μικρότερο δυνατό σφάλμα που μπορούμε να απαιτήσουμε ;
- Εξαρτάται από τη σχετική ακρίβεια του υπολογιστή.
Απλή ακρίβεια $\approx 10^{-7}$
Διπλή ακρίβεια $\approx 10^{-15}$

Αναζήτηση με διαμέριση

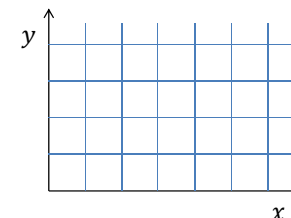
Υπολογιστικός χρόνος που απαιτείται

- Πως μετράμε τον υπολογιστικό χρόνο που απαιτεί η αναζήτηση με διαμέριση;
- Πως συγκρίνουμε δύο διαφορετικούς αλγόριθμους για να βρούμε τον πιο αποδοτικό ;
- Σε όλους τους αλγόριθμους ελαχιστοποίησης γίνονται δύο ειδών υπολογισμοί:
 - Υπολογισμοί της αντικειμενικής συνάρτησης.
 - Λειτουργίες που αφορούν καθαυτό τον αλγόριθμο (πχ. εύρεση της μικρότερης τιμής)
- Θεωρούμε ότι ο χρόνος που απαιτείται για λειτουργίες του αλγορίθμου είναι μικρός.
- Χρησιμοποιούμε το **πλήθος υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης** για να αποτιμήσουμε την αποδοτικότητα κάθε αλγορίθμου ελαχιστοποίησης.
- Για μια διαμέριση M διαστημάτων απαιτούνται $M + 1$ υπολογισμοί της συνάρτησης $f(x)$

Αναζήτηση με διαμέριση

Γενίκευση σε πολλές διαστάσεις

- Θεωρήστε μια συνάρτηση 2 μεταβλητών $f(x, y)$
- Πρέπει να κατασκευάσουμε διαμέριση στον άξονα x και στον άξονα y



- Συνολικά απαιτούνται $(M + 1)^2$ υπολογισμοί της συνάρτησης.

Παράδειγμα:

- Πόσος χρόνος απαιτείται για μια συνάρτηση 5 μεταβλητών με διαμέριση 1000 διαστημάτων σε κάθε μεταβλητή, όταν ένας υπολογισμός της συνάρτησης διαρκεί 0.01ms ;
 - Οι υπολογισμοί της συνάρτησης που απαιτούνται είναι:
 $(1000 + 1)^5 \approx 10^{15}$
 - Ο συνολικός χρόνος είναι:
 $10^{15} \cdot 0.01\text{ms} = 10^{10}\text{s} \approx 116 \text{ days}$
- Η αναζήτηση με διαμέριση είναι απαγορευτική για πολλές διαστάσεις.

Αναζήτηση με διαμέριση

Πλεονεκτήματα

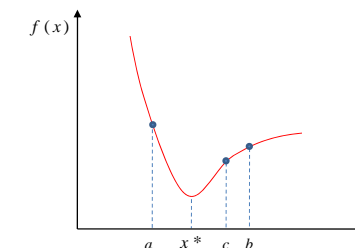
- Εύκολη υλοποίηση
- Χρησιμοποιεί μόνο τις τιμές της συνάρτησης

Μειονεκτήματα

- Απαιτούνται πολλοί υπολογισμοί της συνάρτησης για μικρή έστω ακρίβεια
- Πρακτικά δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε πολλές διαστάσεις

Διαστήματα αβεβαιότητας

Διάστημα αβεβαιότητας
Ένα διάστημα $[a, b]$ που φράζει τη θέση του ελαχίστου, δηλαδή
 $a \leq x^* \leq b$



Το διάστημα $[a, b]$ συνοδεύεται από ένα τρίτο σημείο c (σημείο ελέγχου), που βρίσκεται εντός του διαστήματος $a < c < b$ και τέτοιο ώστε:

$$f(c) < f(a)$$

$$f(c) < f(b)$$

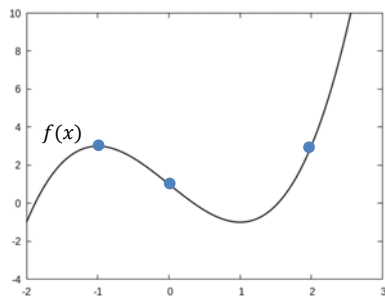
Γράφουμε: $[a, b], c$

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

Βρείτε αν το διάστημα $[-1,2],0$ αποτελεί διάστημα αβεβαιότητας



Βρίσκουμε τις τιμές της συνάρτησης στα τρία σημεία:

$$f(-1) = 3$$

$$f(0) = 1$$

$$f(2) = 3$$

Πρέπει:

$$f(0) < f(-1)$$

$$f(2) < f(-1)$$

Οι συνθήκες ισχύουν, άρα πρόκειται για διάστημα αβεβαιότητας.

Προσέγγιση του ελαχίστου σε διάστημα αβεβαιότητας

Αν το μήκος του διαστήματος $b - a$ είναι μικρό, τότε μια καλή προσέγγιση του ελαχιστοποιητή x^* είναι:

$$x^* \approx \frac{b+a}{2}$$

με σφάλμα (το πολύ):

$$\sigma = \frac{b-a}{2}$$

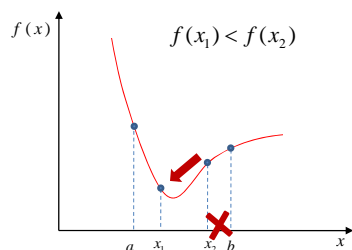
αλλιώς

πρέπει να μικρύνουμε το διάστημα αβεβαιότητας μέχρι να πετύχουμε ικανοποιητικό σφάλμα.

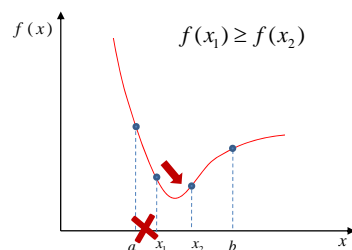
Μείωση του διαστήματος αβεβαιότητας

Χρησιμοποιώντας μόνο τιμές της συνάρτησης

- Θεωρούμε δύο νέα σημεία x_1, x_2 εντός του διαστήματος $[a, b]$ τέτοια ώστε $a < x_1 < x_2 < b$
- Υπολογίζουμε τις τιμές της συνάρτησης $f(x_1), f(x_2)$
- Συγκρίνουμε τις τιμές $f(x_1), f(x_2)$ και απορρίπτουμε ένα τμήμα του διαστήματος.



Νέο διάστημα αβεβαιότητας: $[a, x_2]$



Νέο διάστημα αβεβαιότητας: $[x_1, b]$

Μείωση του διαστήματος αβεβαιότητας

Αλγόριθμος

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)$ και διάστημα αβεβαιότητας $[a, b]$

1. Θεωρούμε δύο νέα σημεία x_1, x_2 εντός του διαστήματος $[a, b]$ τέτοια ώστε $a < x_1 < x_2 < b$
2. Υπολογίζουμε τις τιμές της συνάρτησης $f(x_1), f(x_2)$
3. Έλεγχος
 - a. Αν $f(x_1) < f(x_2)$ τότε θέτουμε ως νέο διάστημα το $[a, x_2]$
 - b. Αν $f(x_1) \geq f(x_2)$ τότε θέτουμε ως νέο διάστημα το $[x_1, b]$
4. Επαναλαμβάνουμε από το βήμα 1

- Πότε τερματίζεται η διαδικασία ;
- Πως επιλέγουμε τα εσωτερικά σημεία ;
- Πως μετράμε την απόδοση του αλγορίθμου ;

Κριτήριο τερματισμού

Η διαδικασία τερματίζεται όταν το σφάλμα γίνει μικρότερο από μια προκαθορισμένη τιμή σ , δηλαδή:

$$\text{σφάλμα} = \frac{b-a}{2} < \sigma \Rightarrow b-a < 2\sigma$$

Ο έλεγχος γίνεται πριν την έναρξη κάθε επανάληψης (πριν πάρουμε τα δύο νέα σημεία)

Πως επιλέγουμε τα εσωτερικά σημεία

Ο τρόπος επιλογής των δύο εσωτερικών σημείων οδηγεί σε αλγορίθμους με διαφορετικές ιδιότητες:

- Αναζήτηση ίσων διαστημάτων
- Αναζήτηση διχοτόμησης
- Αναζήτηση Fibonacci
- Αναζήτηση χρυσής τομής

Πως μετράμε την αποδοτικότητα

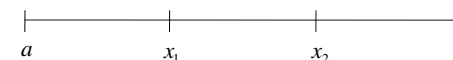
Για να αξιολογήσουμε τους διαφορετικούς τρόπους επιλογής των διαφορετικών σημείων ορίζουμε το συντελεστή μείωσης του διαστήματος αβεβαιότητας:

$$r(n) = \frac{\text{Μήκος τελικού διαστήματος μετά από } n \text{ κλήσεις της } f(x)}{\text{Μήκος αρχικού διαστήματος}}$$

Αναζήτηση ίσων διαστημάτων

Διαλέγουμε τα εσωτερικά σημεία έτσι ώστε το διάστημα αβεβαιότητας να διαιρείται σε τρία ίσα τμήματα, δηλαδή:

$$x_1 = a + \frac{1}{3}(b-a) \quad x_2 = a + \frac{2}{3}(b-a)$$



Αναζήτηση ίσων διαστημάτων

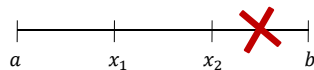
Επανάληψη

Αναπαράσταση του διαστήματος αβεβαιότητας

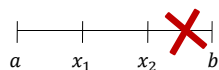
$$k = 0$$



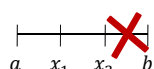
$$k = 1$$



$$k = 2$$



$$k = 3$$



Αναζήτηση ίσων διαστημάτων

Πως μικραίνει το διάστημα αβεβαιότητας

Επανάληψη	Μήκος διαστήματος	Πλήθος κλήσεων της $f(x)$
0	$b - a$	
1	$\frac{2}{3}(b - a)$	2
2	$(\frac{2}{3})^2(b - a)$	4
3	$(\frac{2}{3})^3(b - a)$	6
\vdots	\vdots	\vdots
k	$(\frac{2}{3})^k(b - a)$	$2k$

$$\text{σφάλμα} = \frac{\text{μήκος τελικού διαστήματος}}{2} = \frac{(\frac{2}{3})^k(b - a)}{2}$$

Αναζήτηση ίσων διαστημάτων

Πόσες επαναλήψεις χρειαζόμαστε ;

$$\sigma = \frac{(\frac{2}{3})^k(b - a)}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{2\sigma}{b - a} = (\frac{2}{3})^k \Rightarrow$$

$$\log \frac{2\sigma}{b - a} = \log (\frac{2}{3})^k \Rightarrow$$

$$\log \frac{2\sigma}{b - a} = k \log \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$k = \frac{\log \frac{2\sigma}{b - a}}{\log \frac{2}{3}}$$

Αν προκαθορίσουμε το μέγιστο αποδεκτό σφάλμα σ τότε το πλήθος των επαναλήψεων:

- Εξαρτάται μόνο από το μήκος του αρχικού διαστήματος αβεβαιότητας $b - a$
- Είναι ίδιο για οποιοδήποτε συνάρτηση $f(x)$
- Μπορεί να καθοριστεί εκ των προτέρων

Αναζήτηση ίσων διαστημάτων

Συντελεστής απόδοσης

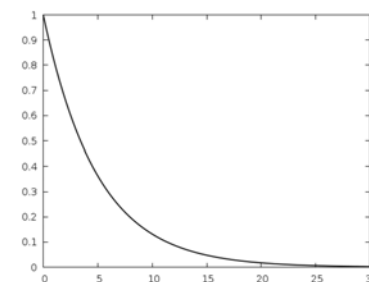
$$r(n) = \frac{\text{Μήκος διαστήματος μετά από } n \text{ κλήσεις της } f(x)}{\text{Αρχικό μήκος διαστήματος}}$$

Επειδή κάθε επανάληψη χρειάζεται δύο υπολογισμούς της $f(x)$, μετά από n κλήσεις έχουν γίνει $\frac{n}{2}$ επαναλήψεις. Μετά από $\frac{n}{2}$ επαναλήψεις το μήκος του διαστήματος αβεβαιότητας είναι:

$$(\frac{2}{3})^{n/2}(b - a)$$

Συνεπώς ο συντελεστής απόδοσης είναι:

$$r(n) = \frac{(\frac{2}{3})^{n/2}(b - a)}{b - a} = (\frac{2}{3})^{n/2}$$



Παράδειγμα

Πόσες επαναλήψεις της μεθόδου των ίσων διαστημάτων χρειάζονται για να βρούμε το ελάχιστο με σφάλμα 10^{-6} όταν το διάστημα αβεβαιότητας είναι το $[0,4]$;

Εφαρμόζουμε τη σχέση

$$k = \frac{\log \frac{2\sigma}{b-a}}{\log \frac{2}{3}} =$$

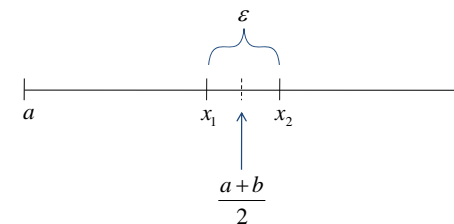
$$\frac{\log \frac{2 \times 10^{-6}}{4-0}}{\log \frac{2}{3}} =$$

36

Αναζήτηση διχοτόμησης

Διαλέγουμε τα εσωτερικά σημεία κοντά στο μέσο του διαστήματος αβεβαιότητας

$$x_1 = \frac{a+b}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \quad x_2 = \frac{a+b}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

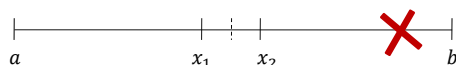


Αναζήτηση διχοτόμησης

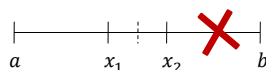
Επανάληψη

Αναπαράσταση του διαστήματος αβεβαιότητας

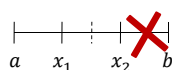
$k = 0$



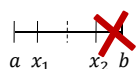
$k = 1$



$k = 2$



$k = 3$



Αναζήτηση διχοτόμησης

Πως μικραίνει το διάστημα αβεβαιότητας

Επανάληψη	Μήκος διαστήματος
0	$b - a$
1	$\frac{1}{2}(b - a) + \frac{\varepsilon}{2}$
2	$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(b - a) + \frac{\varepsilon}{2} \right] + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{4}(b - a) + \frac{\varepsilon}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right)$
3	$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{4}(b - a) + \frac{\varepsilon}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) \right] + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{8}(b - a) + \frac{\varepsilon}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right)$
⋮	⋮
k	$\frac{1}{2^k}(b - a) + \frac{\varepsilon}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}} \right)$

Αναζήτηση διχοτόμησης

Πως μικραίνει το διάστημα αβεβαιότητας

Μετά από k επαναλήψεις το μήκος του διαστήματος αβεβαιότητας είναι:

$$\frac{1}{2^k}(b-a) + \frac{\varepsilon}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}}\right)$$

Όμως ισχύει ότι (ταυτότητα):

$$1 - x^k = (1-x)(1+x+x^2+\dots+x^{k-1}) \Rightarrow$$
$$(1+x+x^2+\dots+x^{k-1}) = \frac{1-x^k}{1-x}$$

Στην περίπτωση μας $x = \frac{1}{2}$ Συνεπώς:

$$\frac{\varepsilon}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}}\right) = \frac{\varepsilon}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^k}}{1 - \frac{1}{2}} = \varepsilon \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$$

Αναζήτηση διχοτόμησης

Πως μικραίνει το διάστημα αβεβαιότητας

Τελικά το μήκος του διαστήματος μετά από k επαναλήψεις είναι:

$$\frac{1}{2^k}(b-a) + \varepsilon \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$$

Παρατηρήστε ότι όταν $k \rightarrow \infty$ τότε το μήκος $\rightarrow \varepsilon$

Συνεπώς το τελικό διάστημα αβεβαιότητας δεν μπορεί να γίνει μικρότερο από ε

Αναζήτηση διχοτόμησης

Πόσες επαναλήψεις χρειαζόμαστε ;

$$\text{σφάλμα} = \frac{\text{μήκος τελικού διαστήματος}}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2^k}(b-a) + \varepsilon \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \right] = \sigma$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το ε είναι μικρό, οπότε γράφουμε:

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2^k}(b-a) \right] = \sigma \Rightarrow \frac{1}{2^k} = \frac{2\sigma}{b-a} \Rightarrow \log \frac{1}{2^k} = \log \frac{2\sigma}{b-a} \Rightarrow$$

$$k \log \frac{1}{2} = \log \frac{2\sigma}{b-a} \Rightarrow k = \frac{\log \frac{2\sigma}{b-a}}{\log \frac{1}{2}}$$

Παράδειγμα

Πόσες επαναλήψεις της μεθόδου αναζήτησης με διχοτόμηση χρειαζονται για να βρούμε το ελάχιστο με σφάλμα 10^{-6} όταν το διάστημα αβεβαιότητας είναι το $[0,4]$;

Εφαρμόζουμε τη σχέση

$$k = \frac{\log \frac{2\sigma}{b-a}}{\log \frac{1}{2}}$$

$$\frac{\log \frac{2 \times 10^{-6}}{4-0}}{\log \frac{1}{2}} =$$

21

Αναζήτηση διχοτόμησης

Συντελεστής απόδοσης

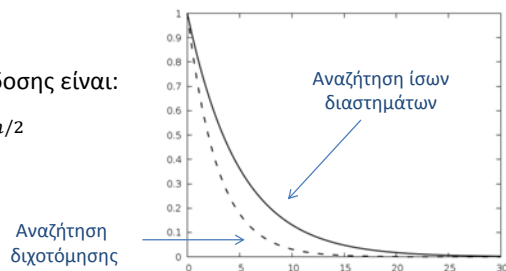
$$r(n) = \frac{\text{Μήκος διαστήματος μετά από } n \text{ κλήσεις της } f(x)}{\text{Αρχικό μήκος διαστήματος}}$$

Επειδή κάθε επανάληψη χρειάζεται δύο υπολογισμούς της $f(x)$, μετά από n κλήσεις έχουν γίνει $\frac{n}{2}$ επαναλήψεις. Μετά από $\frac{n}{2}$ επαναλήψεις το μήκος του διαστήματος αβεβαιότητας είναι:

$$\approx \frac{1}{2^{n/2}} (b - a)$$

Συνεπώς ο συντελεστής απόδοσης είναι:

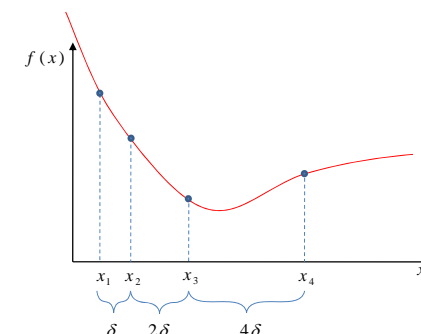
$$r(n) = \frac{1}{2^{n/2}} (b - a) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n/2}$$



Εύρεση αρχικού διαστήματος αβεβαιότητας

Εύρεση αρχικού διαστήματος αβεβαιότητας

1. Δίνεται μια τιμή εκκίνησης x_1 και βήμα δ
2. Υπολογίζουμε την $f(x_1)$.
3. Παίρνουμε ένα δεύτερο σημείο $x_2 = x_1 + \delta$ και υπολογίζουμε την $f(x_2)$.
4. Επαναλαμβάνουμε για $k = 3, 4, \dots$
 - a. Διπλασιάζουμε το βήμα $\delta \leftarrow 2\delta$
 - b. Παίρνουμε ένα νέο σημείο $x_k = x_{k-1} + \delta$
 - c. Ελέγχουμε αν τα σημεία $[x_{k-2}, x_k], x_{k-1}$ αποτελούν διάστημα αβεβαιότητας.



Τι γίνεται αν $f(x_2) > f(x_1)$;

Μείωση του διαστήματος αβεβαιότητας: Τετραγωνική παρεμβολή

Η βασική ιδέα

Αφού ξέρουμε τις τιμές της συνάρτησης σε τρία σημεία a, b, c μπορούμε να προσεγγίσουμε τη συνάρτηση $f(x)$ με μια παραβολή που διέρχεται από τα τρία αυτά σημεία.

Η παραβολή έχει εξίσωση:

$$p(x) = Ax^2 + Bx + C$$

όπου τα A, B, C πρέπει να προσδιοριστούν

Το ελάχιστο της παραβολής είναι:

$$\tilde{x} = -\frac{B}{2A}$$

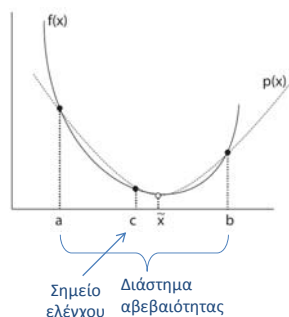
Οι άγνωστοι συντελεστές προσδιορίζονται από:

$$f(a) = Aa^2 + Ba + C$$

$$f(b) = Ab^2 + Bb + C$$

$$f(c) = Ac^2 + Bc + C$$

} Γραμμικό σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους

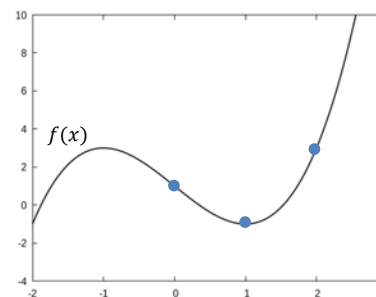


Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

- a. Βρείτε την παραβολή που διέρχεται από τα σημεία $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$
- b. Ποιο είναι το ελάχιστο της παραβολής;



Η παραβολή έχει εξίσωση:

$$p(x) = Ax^2 + Bx + C$$

Την εφαρμόζουμε στα τρία σημεία:

$$Ax_1^2 + Bx_1 + C = f(x_1)$$

$$Ax_2^2 + Bx_2 + C = f(x_2)$$

$$Ax_3^2 + Bx_3 + C = f(x_3)$$

Προκύπτει το γραμμικό σύστημα εξισώσεων:

$$C = 1$$

$$A + B + C = -1$$

$$4A + 2B = 3$$

Παράδειγμα

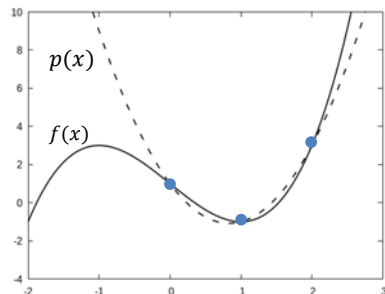
$$\left. \begin{aligned} C &= 1 \\ A + B + C &= -1 \\ 4A + 2B &= 3 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} A + B &= -2 \\ 4A + 2B &= 2 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} A &= 3 \\ B &= -5 \end{aligned}$$

Συνεπώς η παραβολή είναι:

$$p(x) = 3x^2 - 5x + 1$$



Για να βρούμε το ελάχιστο:

$$p'(x) = 6x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{6}$$

Επίσης:

$$p''(x) = 6 > 0 \Rightarrow \text{ελάχιστο}$$

Μείωση του διαστήματος αβεβαιότητας: Τετραγωνική παρεμβολή

Λύνοντας το σύστημα λαμβάνουμε τους συντελεστές A, B, C .

Το ελάχιστο της παραβολής είναι:

$$\tilde{x} = \frac{1}{2} \frac{\alpha^2(f_b - f_c) + b^2(f_c - f_a) + c^2(f_a - f_b)}{\alpha(f_b - f_c) + b(f_c - f_a) + c(f_a - f_b)}$$

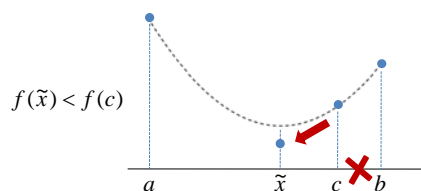
όπου συμβολίζουμε:

$$f_a = f(a) \quad f_b = f(b) \quad f_c = f(c)$$

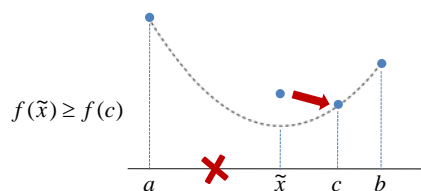
Στη συνέχεια ανάλογα με τη θέση του ελαχίστου απορρίπτουμε ένα τμήμα του διαστήματος αβεβαιότητας.

Μείωση του διαστήματος αβεβαιότητας: Τετραγωνική παρεμβολή

$$\tilde{x} < c$$

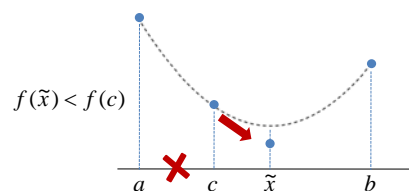


Νέο διάστημα: $[a, c], \tilde{x}$

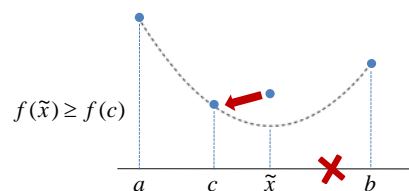


Νέο διάστημα: $[\tilde{x}, b], c$

$$\tilde{x} \geq c$$



Νέο διάστημα: $[c, b], \tilde{x}$



Νέο διάστημα: $[a, \tilde{x}], c$

Μείωση του διαστήματος αβεβαιότητας: Τετραγωνική παρεμβολή

Αλγόριθμος

1. Δίνονται ως είσοδος το αρχικό διάστημα αβεβαιότητας $[a, b], c$
2. Έλεγχος αν ικανοποιούνται τα κριτήρια τερματισμού
3. Υπολογίζουμε το ελάχιστο της παραβολής \tilde{x} και το $\tilde{f} = f(\tilde{x})$
4. Έλεγχος της θέσης του \tilde{x} σε σχέση με το c
 - a. Εάν $\tilde{x} < c$
 - Εάν $\tilde{f} < f(c)$ τότε το νέο διάστημα είναι: $[a, c], \tilde{x}$
 - Εάν $\tilde{f} \geq f(c)$ τότε το νέο διάστημα είναι: $[\tilde{x}, b], c$
 - b. Εάν $\tilde{x} \geq c$
 - Εάν $\tilde{f} < f(c)$ τότε το νέο διάστημα είναι: $[a, c], \tilde{x}$
 - Εάν $\tilde{f} \geq f(c)$ τότε το νέο διάστημα είναι: $[\tilde{x}, b], c$
5. Επαναλαμβάνουμε από το βήμα 2.

Μείωση του διαστήματος αβεβαιότητας: Τετραγωνική παρεμβολή

Κριτήρια τερματισμού

Εφαρμόζονται κατά περίπτωση ένα ή περισσότερα κριτήρια τερματισμού της διαδικασίας.

1. Αν το μέγεθος του διαστήματος αβεβαιότητας γίνει μικρότερο από ένα προκαθορισμένο όριο

$$b - a < 2\varepsilon_x$$

2. Η σχετική μείωση της τιμής της συνάρτησης είναι μικρότερη από ένα προκαθορισμένο όριο

$$\left| \frac{f_c^{(k)} - f_c^{(k+1)}}{f_c^{(k)}} \right| < \varepsilon_f$$

3. Ο συνολικός αριθμός κλήσεων της συνάρτησης ξεπερνά ένα προκαθορισμένο όριο n_{max}

Μείωση του διαστήματος αβεβαιότητας: Τετραγωνική παρεμβολή

Πόσες επαναλήψεις χρειάζονται ;

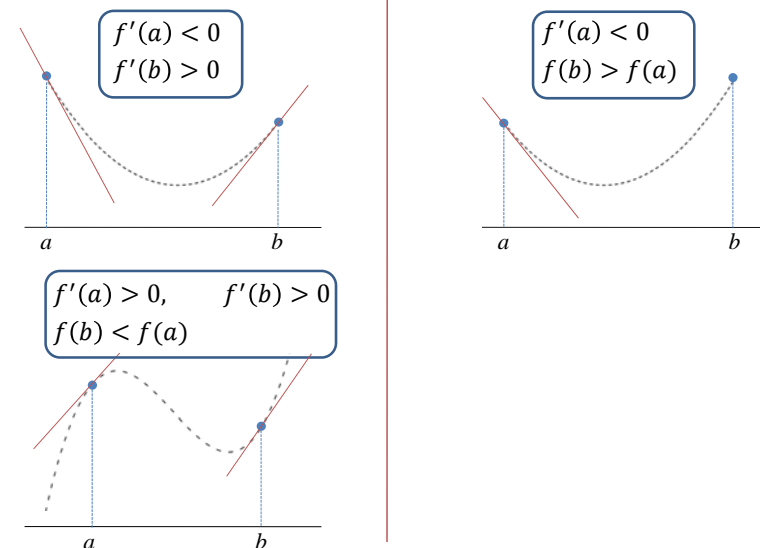
- Το πλήθος των επαναλήψεων που απαιτούνται για να πετύχουμε μια προκαθορισμένη ακρίβεια:
 - Εξαρτάται από τη μορφολογία της συνάρτησης
 - Δεν μπορεί να προσδιοριστεί εκ των προτέρων
- Σύγκριση με τις προηγούμενες μεθόδους μείωσης του διαστήματος αβεβαιότητας είναι εφικτή μόνο αφού ολοκληρωθεί ο αλγόριθμος.

Μείωση του διαστήματος αβεβαιότητας: Κυβική παρεμβολή

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πολυώνυμο υψηλότερης τάξης, πχ κυβικό

$$p(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

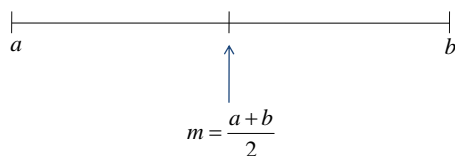
Μείωση του διαστήματος αβεβαιότητας: Χρήση της πρώτης παραγώγου



Μείωση του διαστήματος αβεβαιότητας: Διχοτόμηση (με χρήση της πρώτης παραγώγου)

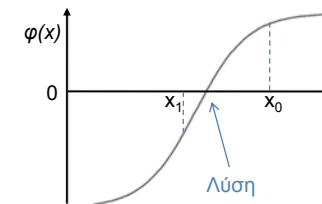
Αλγόριθμος

1. Χωρίζουμε το διάστημα σε δύο ίσα μέρη $m = \frac{a+b}{2}$
2. Υπολογίζουμε την παράγωγο $f'(m)$
3. Έλεγχος κριτηρίων τερματισμού
4. Έλεγχος
 - a. Εάν $f'(a) < 0$ και $f'(m) > 0$ το νέο διάστημα είναι $[a, m]$
 - b. Εάν $f'(m) < 0$ και $f'(b) > 0$ το νέο διάστημα είναι $[m, b]$
5. Επαναλαμβάνουμε από το βήμα 1



Η μέθοδος Newton για εύρεση ριζών εξίσωσης

Θέλουμε να λύσουμε τη μη γραμμική εξίσωση $\varphi(x) = 0$



Η βασική ιδέα:

Ξεκινάμε με μια αρχική προσέγγιση της λύσης x_0

Κατόπιν ψάχνουμε ένα βήμα h τέτοιο ώστε το σημείο $x_0 + h$ να είναι η λύση, δηλαδή:

$$\varphi(x_0 + h) = 0$$



Sir Isaac Newton 1642-1726

Ανάπτυγμα σε σειρά Taylor

Ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης $f(x)$ γύρω από το σημείο a

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \dots + \frac{(x-a)^m}{m!}f^{(m)}(a)$$

ή αλλιώς

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

Ανάπτυγμα της συνάρτησης $f(x)$ σε απόσταση h από το σημείο x

Προκύπτει αν θέσουμε στο παραπάνω όπου a το x και όπου x το $x+h$

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \dots + \frac{h^m}{m!}f^{(m)}(x)$$

ή αλλιώς

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x)$$

Η μέθοδος Newton για εύρεση ριζών εξίσωσης

Γράφουμε τη σειρά Taylor της $\varphi(x)$ κρατώντας μόνο τον όρο πρώτης τάξης

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + h\varphi'(x) + \frac{h^2}{2}\varphi''(x) + \dots + \frac{h^m}{m!}\varphi^{(m)}(x)$$

Θέλουμε ένα βήμα h τέτοιο ώστε να φτάσουμε στη λύση:

$$\varphi(x+h) = 0$$

Αντικαθιστούμε από τη σειρά Taylor:

$$\varphi(x) + h\varphi'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$h = -\frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)}$$

Βήμα Newton για επίλυση εξισώσεων

Η μέθοδος Newton για εύρεση ριζών εξίσωσης

Αλγόριθμος:

1. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x)$ και αρχικό σημείο x_0
2. Επαναλαμβάνουμε για $k = 1, 2, \dots$
 - a. Ελέγχουμε τα κριτήρια τερματισμού
 - b. Υπολογίζουμε το βήμα Newton: $h = -\varphi(x)/\varphi'(x)$
 - c. Βρίσκουμε το νέο σημείο: $x_{k+1} = x_k + h$

Συνήθη κριτήρια τερματισμού:

- $|\varphi(x)| < \varepsilon$
- Το πλήθος των επαναλήψεων ξεπερνάει ένα προκαθορισμένο αριθμό n_{max}

Η μέθοδος Newton για ελαχιστοποίηση

Εάν θέλουμε να βρούμε ελάχιστο της συνάρτησης $f(x)$ εφαρμόζουμε τη μέθοδο Newton για να λύσουμε τη μη γραμμική εξίσωση:

$$f'(x) = 0$$

Γράφουμε το ανάπτυγμα Taylor της $f'(x)$ κρατώντας μόνο τον όρο πρώτης τάξης:

$$f'(x+h) = f'(x) + hf''(x)$$

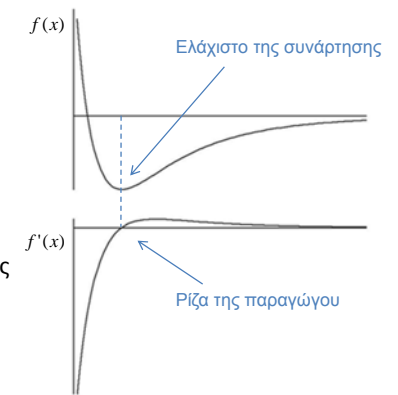
Το βήμα h πρέπει να είναι τέτοιο ώστε να μας οδηγήει στη λύση:

$$f'(x+h) = 0 \Rightarrow$$

$$f'(x) + hf''(x) = 0 \Rightarrow$$

$$h = -\frac{f'(x)}{f''(x)}$$

Βήμα Newton για ελαχιστοποίηση



Η μέθοδος Newton για ελαχιστοποίηση

Αλγόριθμος:

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)$ και αρχικό σημείο x_0
2. Επαναλαμβάνουμε για $k = 1, 2, \dots$
 - a. Ελέγχουμε τα κριτήρια τερματισμού
 - b. Υπολογίζουμε το βήμα Newton: $h = -f'(x)/f''(x)$
 - c. Βρίσκουμε το νέο σημείο: $x_{k+1} = x_k + h$

Συνήθη κριτήρια τερματισμού:

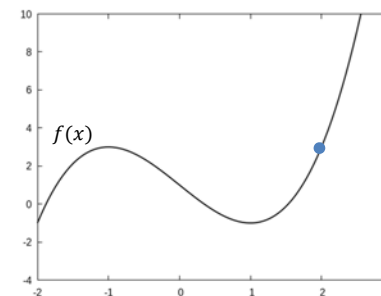
- $|f'(x)| < \varepsilon$
- Το πλήθος των επαναλήψεων ξεπερνάει ένα προκαθορισμένο αριθμό n_{max}

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

- a. Και το αρχικό σημείο $x_0 = 2$. Ποιο είναι το βήμα Newton της πρώτης επανάληψης;
- b. Ποιο είναι το νέο σημείο που προκύπτει;



Το βήμα Newton είναι

$$h = -f'(x)/f''(x)$$

Χρειαζόμαστε την $f'(x)$ και $f''(x)$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f''(x) = 6x$$

Συνεπώς το βήμα Newton είναι:

$$h = -\frac{f'(x)}{f''(x)} = -\frac{3x^2 - 3}{6x}$$

Αντικαθιστούμε το αρχικό σημείο

$$h = -\frac{3 \times 2^2 - 3}{6 \times 2} \Rightarrow$$
$$h = -\frac{3}{4}$$

Παράδειγμα

Το νέο σημείο είναι:

$$x_1 = x_0 + h \Rightarrow$$

$$x_1 = 2 - \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{5}{4}$$

