Τετραγωνικά μοντέλα

Δ. Γ. Παπαγεωργίου
Τμήμα Μηχανικών Επιστήμης Υλικών
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

dpapageo@cc.uoi.gr
http://pc164.materials.uoi.gr/dpapageo

Τετραγωνικό μοντέλο συνάρτησης

Για συνάρτηση μιας μεταβλητής

Παρατήρηση:
Κάθε συνάρτηση κοντά στο ελάχιστο μοιάζει με μια παραβολή.

Ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης $f(x)$ γύρω από σημείο a

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^m}{m!}f^{(m)}(a)$$

Κρατάμε μέχρι και τους όρους δεύτερης τάξης:

Τετραγωνικό μοντέλο συνάρτησης

$$q(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a)$$

Πολυώνυμο δεύτερου βαθμού (παραβολή)

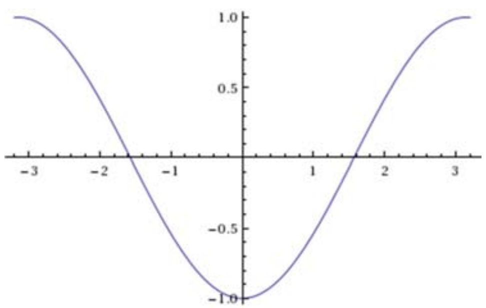
Παράδειγμα τετραγωνικού μοντέλου #1

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = -\cos x$$

Βρείτε το τετραγωνικό μοντέλο της συνάρτησης γύρω από το σημείο $a = 0$

Σημείωση: Το σημείο $a = 0$ είναι τοπικό ελάχιστο της $f(x)$



Παράδειγμα τετραγωνικού μοντέλου #1

Το τετραγωνικό μοντέλο είναι:

$$q(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a)$$

Χρειαζόμαστε τα $f(0),\ f'(0),\ f''(0)$

$$f(0) = -\cos 0 = -1$$

$$f'(x) = \sin x$$
$$f'(0) = \sin 0 = 0$$

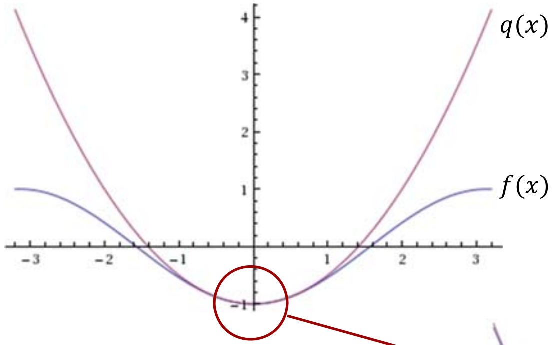
$$f''(x) = \cos x$$
$$f''(0) = \cos 0 = 1$$

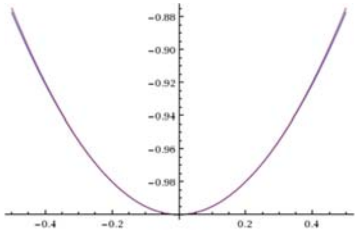
Συνεπώς το τετραγωνικό μοντέλο γύρω από το $a = 0$ είναι:

$$q(x) = -1 + (x-0)\cdot 0 + \frac{(x-0)^2}{2}\cdot 1 \ \Rightarrow$$

$$q(x) = \frac{x^2}{2} - 1$$

Παράδειγμα τετραγωνικού μοντέλου #1





Παρατήρηση:

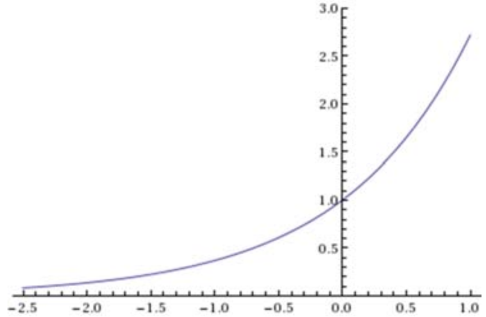
Το ελάχιστο της συνάρτησης συμπίπτει με αυτό του τετραγωνικού μοντέλου

Παράδειγμα τετραγωνικού μοντέλου #2

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^x$$

Βρείτε το τετραγωνικό μοντέλο της συνάρτησης γύρω από το σημείο $a = 0$



Παράδειγμα τετραγωνικού μοντέλου #2

Το τετραγωνικό μοντέλο είναι:

$$q(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a)$$

Χρειαζόμαστε τα $f(0),\ f'(0),\ f''(0)$

$$f(0) = e^0 = 1$$

$$f'(x) = e^x$$
$$f'(0) = e^0 = 1$$

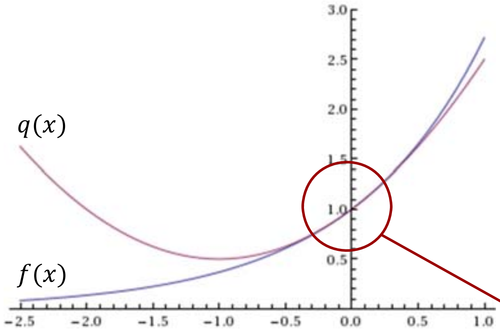
$$f''(x) = e^x$$
$$f''(0) = e^0 = 1$$

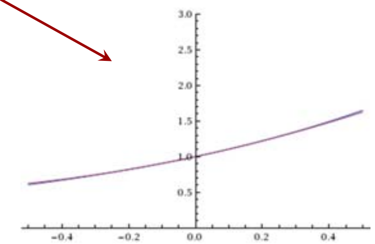
Συνεπώς το τετραγωνικό μοντέλο γύρω από το $a = 0$ είναι:

$$q(x) = 1 + (x-0)\cdot 1 + \frac{(x-0)^2}{2}\cdot 1 \Rightarrow$$

$$q(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

Παράδειγμα τετραγωνικού μοντέλου #2





Παρατήρηση:

Το τετραγωνικό μοντέλο έχει ελάχιστο, η συνάρτηση όχι

Το ελάχιστο του τετραγωνικού μοντέλου

Ποιο είναι το ελάχιστο του τετραγωνικού μοντέλου ;

$$q(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a)$$

Υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο:

$$q'(x) = f'(a) + (x-a)f''(a)$$

Βρίσκουμε που μηδενίζεται:

$$q'(x) = 0 \;\Rightarrow$$

$$f'(a) + (x-a)f''(a) = 0 \;\Rightarrow$$

$$x - a = -\frac{f'(a)}{f''(a)} \;\Rightarrow$$

$$\boxed{x = a - \frac{f'(a)}{f''(a)}}$$

Ελέγχουμε τη δεύτερη παράγωγο:

$$q''(x) = f''(a)$$

Το τετραγωνικό μοντέλο έχει την ίδια δεύτερη παράγωγο με την πραγματική συνάρτηση στο σημείο a.

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = e^{-x}(x-2)^2$$

a. Βρείτε αναλυτικά το σημείο στο οποίο η $f(x)$ έχει ελάχιστο.
b. Βρείτε το τετραγωνικό μοντέλο της συνάρτησης γύρω από το ελάχιστο.
c. Ποιο είναι το ελάχιστο του τετραγωνικού μοντέλου ;
d. Βρείτε το τετραγωνικό μοντέλο της συνάρτησης γύρω από το σημείο $a = 1$.
e. Ποιο είναι το ελάχιστο του τετραγωνικού μοντέλου ;

Παράδειγμα

a. Βρείτε αναλυτικά το σημείο στο οποίο η $f(x) = e^{-x}\,(x-2)^2$ έχει ελάχιστο.

Βρίσκουμε τις παραγώγους:

$$f'(x) = -e^{-x}(x-2)^2 + 2e^{-x}(x-2) =$$

$$e^{-x}(x-2)(-x+2+2) =$$

$$e^{-x}(x-2)(4-x)$$

$$f''(x) = e^{-x}(x-2)^2 - 2e^{-x}(x-2) - 2e^{-x}(x-2) + 2e^{-x} =$$

$$e^{-x}(x-2)^2 - 4e^{-x}(x-2) + 2e^{-x}$$

Βρίσκουμε που μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος:

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow$$

$$e^{-x}(x-2)(4-x) = 0 \;\Rightarrow x = \begin{cases} 2 \\ 4 \end{cases}$$

Για κάθε λύση εξετάζουμε τη δεύτερη παράγωγο:

$$f''(2) = \frac{2}{e^2} > 0 \quad \Rightarrow$$

ελάχιστο

$$f''(4) = \frac{1}{e^4}(4-2)^2 - 4\frac{1}{e^4}(4-2) + \frac{2}{e^4} =$$

$$\frac{4}{e^4} - 4\frac{2}{e^4} + \frac{2}{e^4} = -\frac{2}{e^4} < 0 \;\Rightarrow$$

μέγιστο

Παράδειγμα

b. Βρείτε το τετραγωνικό μοντέλο της συνάρτησης γύρω από το ελάχιστο.

Έχουμε βρεί ότι:

$$f(x) = e^{-x}(x-2)^2$$

$$f'(x) = e^{-x}(x-2)(4-x)$$

$$f''(x) = e^{-x}(x-2)^2 - 4e^{-x}(x-2) + 2e^{-x}$$

Το τετραγωνικό μοντέλο είναι:

$$q(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2}$$

Για $a = 2$

$$f(2) = 0$$

$$f'(2) = 0$$

$$f''(2) = \frac{2}{e^2}$$

$$q(x) = \frac{(x-2)^2}{2}\frac{2}{e^2} \;\Rightarrow$$

$$q(x) = \frac{(x-2)^2}{e^2}$$

Παράδειγμα

c. Ποιο είναι το ελάχιστο του τετραγωνικού μοντέλου ;

Βρήκαμε ότι:

$$q(x) = \frac{(x-2)^2}{e^2}$$

Οι παράγωγοι του μοντέλου είναι:

$$q'(x) = \frac{2}{e^2}(x-2) = 0 \;\Rightarrow\; x = 2$$

Παράδειγμα

d. Βρείτε το τετραγωνικό μοντέλο της συνάρτησης γύρω από το σημείο $a = 1$.

Έχουμε βρεί ότι:

$$f(x) = e^{-x}(x-2)^2$$

$$f'(x) = e^{-x}(x-2)(4-x)$$

$$f''(x) = e^{-x}(x-2)^2 - 4e^{-x}(x-2) + 2e^{-x}$$

Για $a = 1$

$$f(1) = \frac{1}{e}(1-2)^2 = \frac{1}{e}$$

$$f'(1) = \frac{1}{e}(1-2)(4-1) = -\frac{3}{e}$$

$$f''(1) = \frac{1}{e}(1-2)^2 - \frac{4}{e}(1-2) + \frac{2}{e} = \frac{1}{e} + \frac{4}{e} + \frac{2}{e} = \frac{7}{e}$$

Το τετραγωνικό μοντέλο είναι:

$$q(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} \;\Rightarrow$$

$$q(x) = \frac{1}{e} - \frac{3}{e}(x-1) + \frac{7}{e}\frac{(x-1)^2}{2}$$

Παράδειγμα

e. Ποιο είναι το ελάχιστο του τετραγωνικού μοντέλου ;

Βρήκαμε ότι:

$$q(x) = \frac{1}{e} - \frac{3}{e}(x-1) + \frac{7}{e}\frac{(x-1)^2}{2}$$

Η παράγωγος του μοντέλου είναι:

$$q'(x) = -\frac{3}{e} + \frac{7}{e}(x-1)$$

$$q'(x) = 0 \;\Rightarrow$$

$$-\frac{3}{e} + \frac{7}{e}(x-1) = 0 \;\Rightarrow$$

$$7(x-1) = 3 \;\Rightarrow$$

$$x - 1 = \frac{3}{7} \;\Rightarrow$$

$$x = 1 + \frac{3}{7} \approx 1.43$$

Παραβολή σε πολλές διαστάσεις

Η παραβολή σε πολλές διαστάσεις έχει τη μορφή:

$$q(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x} + c$$

όπου:

$\boldsymbol{A}$	Συμμετρικός πίνακας $N \times N$
$\boldsymbol{b}$	Διάνυσμα
c	Σταθερά

Υπενθύμιση: Πράξεις μεταξύ πινάκων και διανυσμάτων

Αν έχουμε: $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$

Πολλαπλασιασμός διανυσμάτων

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix} = \text{αριθμός}$$

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square & \square & \square \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} = \text{πίνακας}$$

Πολλαπλασιασμός πίνακα με διάνυσμα

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix} = \text{διάνυσμα στήλη}$$

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square \end{bmatrix} = \text{διάνυσμα γραμμή}$$

Υπενθύμιση: Πράξεις μεταξύ πινάκων και διανυσμάτων

Ανάστροφοι αθροισμάτων

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^T = \boldsymbol{a}^T + \boldsymbol{b}^T$

$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}^T$

Ανάστροφοι γινομένων

$(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b})^T = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{a}$

$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$

$(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{b})^T = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{a}$

Μέτρο διανύσματος

$\|\boldsymbol{x}\|^2 = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}$

Πρώτες παράγωγοι

$\nabla(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}) = \nabla(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}$

Για συμμετρικό πίνακα A

$\nabla(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$

$\nabla^2(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{A}$

Υπενθύμιση: Συμβολισμοί

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_N} \end{bmatrix}$$

Το διάνυσμα πρώτων παραγώγων της συνάρτησης.

Συμβολίζεται και με $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$

Ο πίνακας των δευτέρων παραγώγων της συνάρτησης.

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_N} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_1} & & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N^2} \end{bmatrix}$$

Παραβολή σε πολλές διαστάσεις. Παράδειγμα #1

Παραβολή με $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $c = 0$

Γράφουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$q(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x} + c \ \Rightarrow$$

$$q(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0 \ \Rightarrow$$

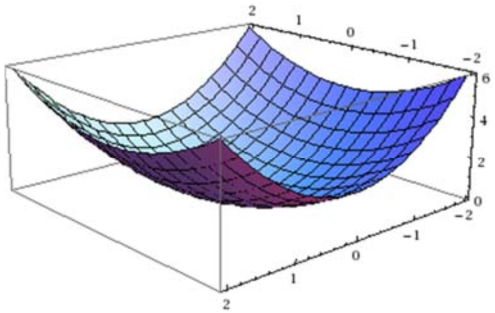
$$q(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} \ \Rightarrow$$

$$\boxed{q(\boldsymbol{x}) = \frac{x_1^2}{2} + x_2^2}$$

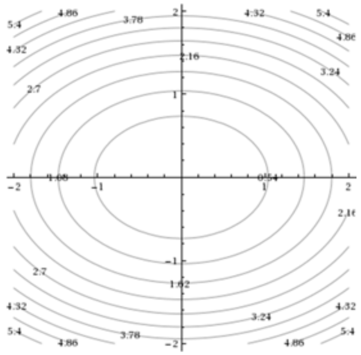
Παραβολή σε πολλές διαστάσεις. Παράδειγμα #1

$$q(\boldsymbol{x}) = \frac{x_1^2}{2} + x_2^2$$

Τρισδιάστατη απεικόνιση



Ισοϋψείς καμπύλες



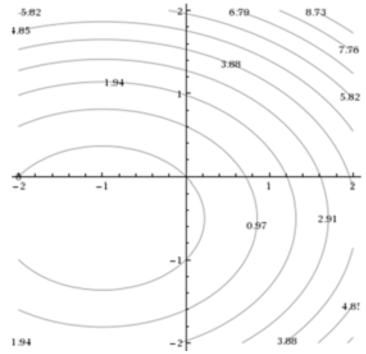
Παραβολή σε πολλές διαστάσεις. Παράδειγμα #2

Πως γίνεται το προηγούμενο παράδειγμα αν το διάνυσμα $\boldsymbol{b}$ έχει μη μηδενική τιμή; Πχ $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$q(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x} + c \;\Rightarrow$$

$$q(\boldsymbol{x}) = \frac{x_1^2}{2} + x_2^2 + \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \;\Rightarrow$$

$$q(\boldsymbol{x}) = \frac{x_1^2}{2} + x_2^2 + x_1 + x_2$$



Παραβολή σε πολλές διαστάσεις. Παράδειγμα #3

Παραβολή με μη διαγώνιο πίνακα $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad c = 0$$

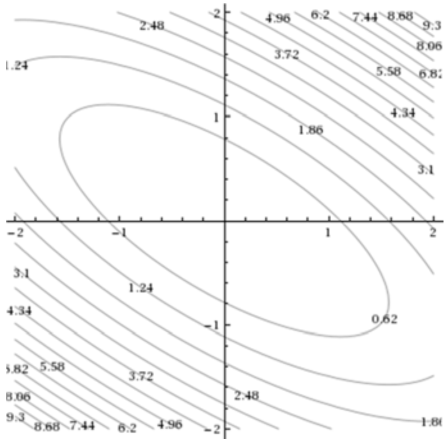
$$q(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x} + c \;\Rightarrow$$

$$q(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0 \;\Rightarrow$$

$$q(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} \;\Rightarrow$$

$$q(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\{x_1(x_1 + x_2) + x_2(x_1 + 2x_2)\} \;\Rightarrow$$

$$q(\boldsymbol{x}) = \frac{x_1^2}{2} + x_2^2 + x_1 x_2$$



Το ελάχιστο της παραβολής

Θα βρούμε που έχει ελάχιστο η παραβολή:

$$q(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x} + c$$

Υπολογίζουμε τις πρώτες παραγώγους:

$$\nabla q(\boldsymbol{x}) = \nabla\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x} + c\right) =$$

$$\nabla\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\right) + \nabla(\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x}) + \nabla(c) =$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$$

Βρίσκουμε που μηδενίζονται οι πρώτες παράγωγοι:

$$\nabla q(\boldsymbol{x}) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} = 0 \;\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{b} \;\Rightarrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}}$$

Οι δεύτερες παράγωγοι είναι:

$$\nabla^2 q(\boldsymbol{x}) = \nabla(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}) =$$

$$\nabla(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) + \nabla\boldsymbol{b} =$$

$$\boldsymbol{A}$$

Παράδειγμα

Βρείτε το ελάχιστο της τετραγωνικής συνάρτησης

$$q(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x} + c$$

με $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ $c = 0$

Η τετραγωνική συνάρτηση είναι:

$$q(x,y) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} + 0 =$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x+y\\x+2y\end{bmatrix} + y =$$

$$\frac{1}{2}\big(x(x+y) + y(x+2y)\big) + y =$$

$$\frac{1}{2}(x^2 + 2xy + 2y^2) + y \Rightarrow$$

$$q(x,y) = \frac{x^2}{2} + y^2 + xy + y$$

Βρίσκουμε τις παραγώγους:

$$(1)\quad \frac{\partial q}{\partial x} = x + y = 0$$

$$(2)\quad \frac{\partial q}{\partial y} = 2y + x + 1 = 0$$

Αντικαθιστώ την (1) στην (2)

$y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1$

Από την (1)

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

Παράδειγμα

Γνωρίζουμε ότι ο πίνακας δευτέρων παραγώγων της $q(\boldsymbol{x})$ είναι ο $\boldsymbol{A}$.

Πρέπει να δούμε αν είναι θετικά ορισμένος, δηλαδή αν όλες οι ιδιοτιμές του είναι θετικές.

Σχηματίζουμε το πρόβλημα ιδιοτιμών του πίνακα $\boldsymbol{A}$.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{w} = \lambda\boldsymbol{w} \Rightarrow$$

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{w} = 0$$

Πρέπει η ορίζουσα του $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})$ να είναι μηδέν.

$$|\,\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}\,| = \left|\,\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\,\right| =$$

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\1 & 2-\lambda\end{vmatrix} =$$

$$(1-\lambda)(2-\lambda) - 1 =$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - \lambda + 2 - 1 =$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 1$$

Βρίσκω τις λύσεις:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Και οι δύο ιδιοτιμές είναι θετικές, άρα ο πίνακας Α είναι θετικά ορισμένος, άρα το σημείο $(1, -1)$ είναι ελάχιστο.

Τετραγωνικό μοντέλο πολυδιάστατης συνάρτησης

Ανάπτυγμα Taylor πολυδιάστατης συνάρτησης γύρω από το σημείο $\boldsymbol{a}$ όπου κρατάμε μέχρι τους όρους δεύτερης τάξης.

$$q(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})^T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^T\boldsymbol{G}(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$$

ή

$$q(\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{h} + \frac{1}{2}\boldsymbol{h}^T\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}$$

Χρησιμοποιούμε την πρώτη μορφή:

$$q(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^T - \boldsymbol{a}^T)(\boldsymbol{G}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{a}) =$$

$$f(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{a}) =$$

Όμως επειδή ο $\boldsymbol{G}$ είναι συμμετρικός (δηλαδή $\boldsymbol{G}^T = \boldsymbol{G}$):

$$\left.\begin{aligned}(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{a})^T &= \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{a}\\(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{a})^T &= \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{x}^{T^T} = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}$$

Τετραγωνικό μοντέλο πολυδιάστατης συνάρτησης

$$q(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{a}) \Rightarrow$$

$$q(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{x} + \underbrace{(\boldsymbol{g}^T - \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{G})}_{\boldsymbol{b}^T}\boldsymbol{x} + \underbrace{\frac{1}{2}\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{a} + f(\boldsymbol{a})}_{c}$$

Το $q(\boldsymbol{x})$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$q(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x} + c$$

με

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{G}$

$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{g} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{a}$

$c = \frac{1}{2}\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{a} + f(\boldsymbol{a})$

Το ελάχιστο του τετραγωνικού μοντέλου

Βρήκαμε ότι το ελάχιστο μιας πολυδιάστατης παραβολής είναι:

$$\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$$

Αντικαθιστώντας:

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{G}$

$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{g} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{a}$

Παίρνουμε:

$\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{G}^{-1}(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{a}) \;\Rightarrow$

$\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{g} + \boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{G}\boldsymbol{a} \;\Rightarrow$

$\boxed{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{g}}$ Ελάχιστο του τετραγωνικού μοντέλου

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x,y) = -e^{-x^2} + y - \frac{y^3}{6}$$

a. Βρείτε το ελάχιστο.
b. Βρείτε το τετραγωνικό μοντέλο γύρω από το ελάχιστο.
c. Ποιο είναι το ελάχιστο του τετραγωνικού μοντέλου ;
d. Βρείτε το τετραγωνικό μοντέλο γύρω από το σημείο $\boldsymbol{a} = (0, -1)$.
e. Ποιο είναι το ελάχιστο του τετραγωνικού μοντέλου ;

Παράδειγμα

a. Βρείτε το ελάχιστο της συνάρτησης

$$f(x,y) = -e^{-x^2} + y - \frac{y^3}{6}$$

Οι πρώτες παράγωγοι είναι:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{-x^2} = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 - \frac{y^2}{2} = 0 \;\Rightarrow\; y^2 = 2 \;\Rightarrow$$

$y = \pm\sqrt{2}$

Έχουμε δύο στάσιμα σημεία $(0, \sqrt{2})$ και $(0, -\sqrt{2})$.

Θα εξετάσουμε σε ποια από τις δύο περιπτώσεις ο πίνακας των δευτέρων παραγώγων έχει θετικές ιδιοτιμές.

Οι δεύτερες παράγωγοι είναι:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2e^{-x^2} - 4x^2e^{-x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

Παράδειγμα

Για το σημείο $(0, \sqrt{2})$

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Σχηματίζω το πρόβλημα ιδιοτιμών του $\boldsymbol{G}$

$$\boldsymbol{G}\boldsymbol{w} = \lambda\boldsymbol{w} \;\Rightarrow$$

$$(\boldsymbol{G} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{w} = 0$$

Πρέπει η ορίζουσα του $(\boldsymbol{G} - \lambda\boldsymbol{I})$ να είναι μηδέν.

$$|\,\boldsymbol{G} - \lambda\boldsymbol{I}\,| =$$

$$\left|\, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \,\right| =$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(2-\lambda)\left(-\sqrt{2}-\lambda\right) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\lambda = \begin{cases} 2 \\ -\sqrt{2} \end{cases}$$

Είναι σαγματικό σημείο.

Για το σημείο $(0, -\sqrt{2})$

$$|\boldsymbol{G} - \lambda\boldsymbol{I}| =$$

$$\left|\, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \,\right| =$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & \sqrt{2}-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(2-\lambda)\left(\sqrt{2}-\lambda\right) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\lambda = \begin{cases} 2 \\ \sqrt{2} \end{cases}$$

Είναι ελάχιστο.

Παράδειγμα

b. Βρείτε το τετραγωνικό μοντέλο
γύρω από το ελάχιστο.

Το τετραγωνικό μοντέλο προκύπτει από τη σειρά Taylor όπου $\boldsymbol{a} = (0, \sqrt{2})$ είναι το ελάχιστο:

$$q(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})^T(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^T\boldsymbol{G}(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$$

Οι παράγωγοι στο ελάχιστο είναι μηδέν, συνεπώς:

$$q(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^T\boldsymbol{G}(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$$

Θα υπολογίσουμε την τιμή της συνάρτησης στο ελάχιστο:

$$f(\boldsymbol{a}) = f(0, \sqrt{2}) = -e^{-0^2} + \sqrt{2} - \frac{(\sqrt{2})^3}{6} =$$

$$-1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Παράδειγμα

$$q(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^T\boldsymbol{G}(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) =$$

$$-1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}\right)^T \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}\right) =$$

$$-1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x & y-\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y-\sqrt{2} \end{bmatrix} =$$

$$-1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x & y-\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x \\ \sqrt{2}y+2 \end{bmatrix} =$$

$$-1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2}(2x^2 + \sqrt{2}y^2 + 4y + 2\sqrt{2}) \Rightarrow$$

$$q(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{\sqrt{2}} + 2y - 1 + \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Παράδειγμα

c. Ποιο είναι το ελάχιστο του
τετραγωνικού μοντέλου ;

Βρήκαμε ότι:

$$q(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{\sqrt{2}} + 2y - 1 + \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Οι παράγωγοι είναι:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\frac{\partial q}{\partial y} = \sqrt{2}y + 2 = 0 \Rightarrow y = -\sqrt{2}$$

Για το σημείο $(0, -\sqrt{2})$ ο πίνακας των δευτέρων παραγώγων είναι θετικά ορισμένος ;

Παράδειγμα

d. Βρείτε το τετραγωνικό μοντέλο
γύρω από το σημείο $\boldsymbol{a} = (0, -1)$.

Το τετραγωνικό μοντέλο προκύπτει από τη σειρά Taylor όπου $\boldsymbol{a} = (0, -1)$

$$q(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})^T(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^T\boldsymbol{G}(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$$

Θα υπολογίσουμε την τιμή της συνάρτησης στο σημείο $(0, -1)$

$$f(x, y) = -e^{-x^2} + y - \frac{y^3}{6}$$

$$f(\boldsymbol{a}) = f(0, -1) = -e^{-0^2} - 1 + \frac{1}{6} = -\frac{11}{6}$$

Παράδειγμα

Θα υπολογίσουμε τις πρώτες παραγώγους στο σημείο $(0,-1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{-x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 - \frac{y^2}{2}$$

Συνεπώς:

$$\boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Θα υπολογίσουμε τις δεύτερες παραγώγους στο σημείο $(0,-1)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2e^{-x^2} - 4x^2e^{-x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

Συνεπώς:

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$$q(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\alpha})^T(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^T\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) =$$

$$-\frac{11}{6} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right) + \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right)^T \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$-\frac{11}{6} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y+1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x & y+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y+1 \end{bmatrix} =$$

$$-\frac{11}{6} + \frac{1}{2}(y+1) + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x & y+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2x \\ y+1 \end{bmatrix} =$$

$$-\frac{11}{6} + \frac{1}{2}(y+1) + \frac{1}{2}(2x^2 + (y+1)^2) \Rightarrow$$

$$q(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{3}{2}y - \frac{5}{6}$$

Παράδειγμα

e. Ποιο είναι το ελάχιστο του τετραγωνικού μοντέλου ;

Βρήκαμε ότι:

$$q(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{3}{2}y - \frac{5}{6}$$

Οι παράγωγοι είναι:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 2x = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$$

$$\frac{\partial q}{\partial y} = y + \frac{3}{2} = 0 \;\Rightarrow\; y = -\frac{3}{2} = -1.5$$

Για το σημείο $(0,-\frac{3}{2})$ ο πίνακας των δευτέρων παραγώγων είναι θετικά ορισμένος ;

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x,y) = x^2e^y$$

Βρείτε το τετραγωνικό μοντέλο γύρω από το σημείο $\boldsymbol{a} = (1,0)$.

Το τετραγωνικό μοντέλο προκύπτει από τη σειρά Taylor όπου $\boldsymbol{a} = (1,0)$

$$q(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\alpha})^T(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^T\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$$

Θα υπολογίσουμε την τιμή της συνάρτησης στο σημείο $(1,0)$

$$f(1,0) = 1^2e^0 = 1$$

Παράδειγμα

Θα υπολογίσουμε τις πρώτες παραγώγους:

$f(x, y) = x^2 e^y$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^y$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 e^y$

Συνεπώς:

$\boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Θα υπολογίσουμε τις δεύτερες παραγώγους:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2e^y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 e^y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2xe^y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2xe^y$

Συνεπώς:

$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Παράδειγμα

$$q(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\alpha})^T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^T \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) =$$

$$1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)^T \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) =$$

$$1 + \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - 1 \\ y \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x - 1 & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - 1 \\ y \end{bmatrix} =$$

$$1 + 2(x - 1) + y + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x - 1 & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2(x - 1) + 2y \\ 2(x - 1) + y \end{bmatrix} =$$

$$1 + 2(x - 1) + y + \frac{1}{2}(2(x - 1)^2 + 2(x - 1)y + 2y(x - 1) + y^2) \Rightarrow$$

$$q(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{2} + 2xy - y$$