Ασκήσεις επανάληψης

Δ. Γ. Παπαγεωργίου
Τμήμα Μηχανικών Επιστήμης Υλικών
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

dpapageo@cc.uoi.gr
http://pc164.materials.uoi.gr/dpapageo

Αναζήτηση με διαμέριση

Το διάστημα αβεβαιότητας μιας μονοδιάστατης συνάρτησης είναι $[-4, -2]$. Αν εφαρμόσουμε αναζήτηση με διαμέριση ποιο είναι το μικρότερο πλήθος υποδιαστημάτων που χρειαζόμαστε έτσι ώστε το σφάλμα να είναι το πολύ 10^{-6} ;

Στην αναζήτηση με διαμέριση το μέγιστο σφάλμα ισούται με το μήκος των υποδιαστημάτων:

$$\sigma = \frac{b-a}{M} \Rightarrow$$
$$M = \frac{b-a}{\sigma} \Rightarrow$$
$$M = \frac{-2-(-4)}{10^{-6}} =$$
$$\frac{2}{10^{-6}} =$$
$$2 \times 10^{6}$$

Βήμα Newton

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = -5\,x^3 + 75x + 40$$

Ποιο είναι το βήμα Newton για ελαχιστοποίηση στο σημείο $x = -5$;

Το βήμα Newton για ελαχιστοποίηση είναι

$$h = -\frac{f'(x)}{f''(x)}$$

$$f'(x) = -15x^2 + 75$$
$$f''(x) = -30x$$

$$f'(-5) = -15(-5)^2 + 75 = -300$$
$$f''(-5) = -30(-5) = 150$$

$$h = -\frac{-300}{150} = 2$$

Ιδιοτιμές πίνακα

Βρείτε τις ιδιοτιμές του πίνακα $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

Σχηματίζουμε το πρόβλημα ιδιοτιμών του πίνακα $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{w} = \lambda \boldsymbol{w} \;\Rightarrow$$
$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{w} = 0$$

Πρέπει η ορίζουσα του $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})$ να είναι μηδέν.

$$|\,\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}\,| =$$
$$\left|\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right| =$$
$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 5 \\ 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$(-1-\lambda)^2 - 5^2 =$$
$$(-1-\lambda+5)(-1-\lambda-5) =$$
$$(4-\lambda)(-6-\lambda)$$

Για να είναι η ορίζουσα $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$ θα πρέπει $\lambda = 4$ ή $\lambda = -6$

Πίνακας δευτέρων παραγώγων

Ποιός είναι ο πίνακας των δευτέρων παραγώγων της συνάρτησης
$f(x,y) = -x^2 - y^2 + 4x^2 y$
στο σημείο $(-1,1)$;

Αρχικά βρίσκουμε τις πρώτες παραγώγους

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x + 8xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y + 4x^2$$

Ο πίνακας των δευτέρων παραγώγων είναι:

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2 + 8y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 8x$$

Αντικαθιστώντας $x = 1$ και $y = 1$ παίρνουμε

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -8 & -2 \end{bmatrix}$$

Τετραγωνικό μοντέλο

Βρείτε το τετραγωνικό μοντέλο της συνάρτησης $f(x) = -2\,e^x$ γύρω από το σημείο $a = 0$.

Το τετραγωνικό μοντέλο είναι:

$$q(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a)$$

$f'(x) = -2e^x$

$f''(x) = -2e^x$

$f(0) = -2e^0 = -2$

$f'(0) = -2e^0 = -2$

$f''(0) = -2e^0 = -2$

$q(x) = -2 - 2x - 2\frac{x^2}{2} \Rightarrow$

$q(x) = -x^2 - 2x - 2$

Τετραγωνικό μοντέλο

Βρείτε το τετραγωνικό μοντέλο της συνάρτησης $f(x) = \sin(-5\,x)$ γύρω από το σημείο $a = \frac{\pi}{2}$.

Το τετραγωνικό μοντέλο είναι:

$$q(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a)$$

$f'(x) = -5\cos(-5x)$

$f''(x) = -25\sin(-5x)$

Για $a = \frac{\pi}{2}$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-5\frac{\pi}{2}\right) = -1$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -5\cos\left(-5\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -25\sin\left(-5\frac{\pi}{2}\right) = 25$

Τετραγωνικό μοντέλο

Αντικαθιστούμε στο τετραγωνικό μοντέλο:

$$q(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) \Rightarrow$$

$$q(x) = -1 + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)0 + \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2}25 \Rightarrow$$

$$q(x) = \frac{25}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 - 1$$

Παραβολή σε δύο διαστάσεις

Δίνεται παραβολή σε δύο διαστάσεις με $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $c = -1$
Ποιο είναι το διάνυσμα των πρώτων παραγώγων της παραβολής στο σημείο $(1, -2)$;

Η γενική μορφή της παραβολής είναι:

$$q(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x} + c$$

Αντικαθιστούμε:

$q(x,y) = \frac{1}{2}[x \quad y]\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [1 \quad -1]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 1 =$

$\frac{1}{2}[x \quad y]\begin{bmatrix} -x + y \\ x - y \end{bmatrix} + x - y - 1 =$

$\frac{1}{2}(-x^2 + xy + xy - y^2) + x - y - 1 \Rightarrow$

Παραβολή σε δύο διαστάσεις

$q(x,y) = -\frac{1}{2}x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2 + x - y - 1$

Οι παράγωγοι είναι:

$\frac{\partial q}{\partial x} = -x + y + 1$

$\frac{\partial q}{\partial y} = x - y - 1$

Για το σημείο $(1, -2)$

$\boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} -1 - 2 + 1 \\ 1 + 2 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

Τετραγωνικό μοντέλο σε δύο διαστάσεις

Βρείτε το τετραγωνικό μοντέλο της συνάρτησης $f(x,y) = -2xe^{-y}$ γύρω από το σημείο $\boldsymbol{a} = (-3,0)$.

Το τετραγωνικό μοντέλο για πολυδιάστατη συνάρτηση είναι:

$q(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\alpha})^T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^T\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$

$f(-3,0) = -2(-3)e^{-0} = 6$

$\frac{\partial f}{\partial x} = -2e^{-y}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xe^{-y}$

$\boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} -2e^{-0} \\ 2(-3)e^{-0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \end{bmatrix}$

Τετραγωνικό μοντέλο σε δύο διαστάσεις

$f(x,y) = -2xe^{-y}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2xe^{-y}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2e^{-y}$

$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 0 & 2e^{-0} \\ 2e^{-0} & -2(-3)e^{-0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

Τετραγωνικό μοντέλο σε δύο διαστάσεις

$$q(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})^T(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^T\boldsymbol{G}(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$$

$$q(x,y) = 6 + [-2 \quad -6]\begin{bmatrix} x+3 \\ y \end{bmatrix} + \frac{1}{2}[x+3 \quad y]\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x+3 \\ y \end{bmatrix} =$$

$$6 - 2(x+3) - 6y + \frac{1}{2}[x+3 \quad y]\begin{bmatrix} 2y \\ 2x+6+6y \end{bmatrix} =$$

$$6 - 2x - 6 - 6y + \frac{1}{2}\big(2y(x+3) + y(2x+6+6y)\big) =$$

$$3y^2 + 2xy - 2x$$

Φθίνουσες διευθύνσεις

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x,y) = -2x^2y^2$$

Εξετάστε αν στο σημείο $(-1,-2)$ η διεύθυνση $(1,-3)$ είναι φθίνουσα.

Θα πρέπει να εξετάσουμε αν ισχύει η συνθήκη

$$\boldsymbol{g}^T\boldsymbol{s} < 0$$

Οι πρώτες παράγωγοι είναι:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -4xy^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -4x^2y$$

Στο σημείο $(-1,-2)$ οι παράγωγοι είναι:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -4(-1)(-2)^2 = 16$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -4(-1)^2(-2) = 8$$

$$\boldsymbol{g}^T\boldsymbol{s} = [16 \quad 8]\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} =$$

$$-16 - 16 = -32 < 0$$

Άρα η διεύθυνση είναι φθίνουσα

Διεύθυνση της πιο απότομης καθόδου

Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y) = x^2 - 2\,y^2 + 2xy$. Ποια είναι η διεύθυνση της πιο απότομης καθόδου, στο σημείο $(-1,-2)$;

Η διεύθυνση της πιο απότομης καθόδου είναι: $\boldsymbol{s} = -\boldsymbol{g}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -4y + 2x$$

Χρειαζόμαστε τις πρώτες παραγώγους στο σημείο $(-1,-2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(-1) + 2(-2) = -6$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -4(-2) + 2(-1) = 6$$

Συνεπώς $\boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \end{bmatrix}$ και $\boldsymbol{s} = -\boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix}$

Γραμμική αναζήτηση

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x,y) = 2x^2 + y^2$$

Κάντε γραμμική αναζήτηση στη διεύθυνση $\boldsymbol{s} = (-2, 2)$ ξεκινώντας από το σημείο $\boldsymbol{x} = (1,1)$. Ποιο είναι το νέο σημείο που προκύπτει;

Θα εξετάσουμε αν η διεύθυνση $\boldsymbol{s}$ είναι φθίνουσα, δηλαδή αν ισχύει η συνθήκη $\boldsymbol{g}^T\boldsymbol{s} < 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

$$\boldsymbol{g}^T\boldsymbol{s} = [4 \quad 2]\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$-8 + 4 = -4 < 0$ είναι φθίνουσα

Κατασκευάζουμε τη συνάρτηση

$$\varphi(\lambda) = f(\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{s}) =$$

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}\right) =$$

$$f\left(\begin{bmatrix} 1-2\lambda \\ 1+2\lambda \end{bmatrix}\right) =$$

$$2(1-2\lambda)^2 + (1+2\lambda)^2 \Rightarrow$$

$$\varphi(\lambda) = 12\lambda^2 - 4\lambda + 3$$

Βρίσκουμε το ελάχιστο της $\varphi(\lambda)$

$$\varphi'(\lambda) = 24\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{6}$$

Το νέο σημείο είναι

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$